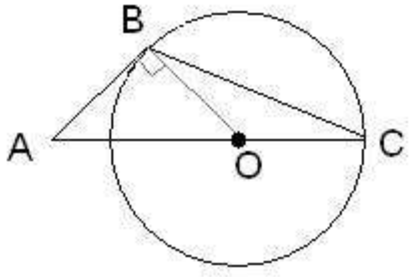
31.03 Подготовка к ГИА

Разобрать задания и решить задачи второй части 5 вариантов.

Задание 24. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 15, а AB = 4.

Решение.

Сделаем построение, проведен радиус BO, который будет перпендикулярен стороне AB, так как AB – касательная к окружности по условию задачи (см. рисунок).



Рассмотрим прямоугольный треугольник ABO, у которого известны два катета: AB=4 и BO=d/2, где d=15 – диаметр окружности. Тогда по теореме Пифагора, длина отрезка AO равна

$$AO=\sqrt{AB^2+BO^2}$$

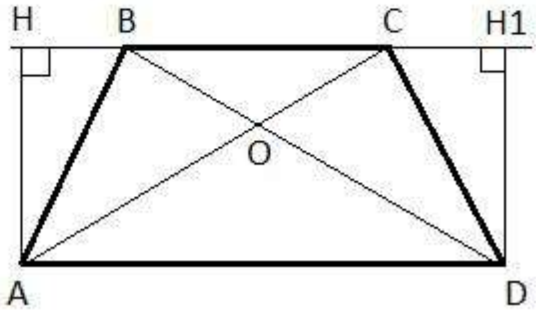
$$AO=\sqrt{16+\frac{225}{4}}=\sqrt{\frac{64+225}{4}}=\sqrt{\frac{289}{4}}=\frac{17}{2}$$

В результате получаем, что длина отрезка AC=AO+OC есть

$$AC=\frac{17}{2}+\frac{15}{2}=\frac{32}{2}=16.$$

Ответ: 16.

Задание 25. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.



Решение.

Запишем площадь треугольника ABO в виде:

$$S_{ABO}=S_{ABC}-S_{BOC},$$

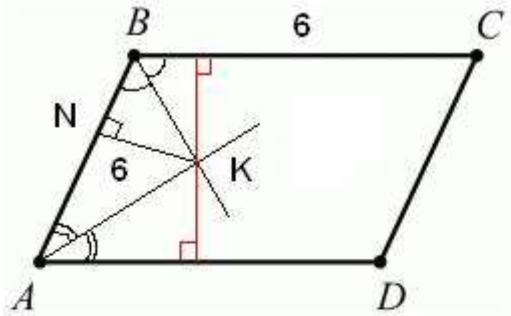
где $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH$ - площадь треугольника ABC; S_{BOC} - площадь треугольника BOC. То есть площадь треугольника ABO можно представить как:

$$S_{ABO}=\frac{1}{2}BC\cdot AH-S_{BOC}. \quad (1)$$

Аналогично запишем площадь треугольника DCO, имеем:

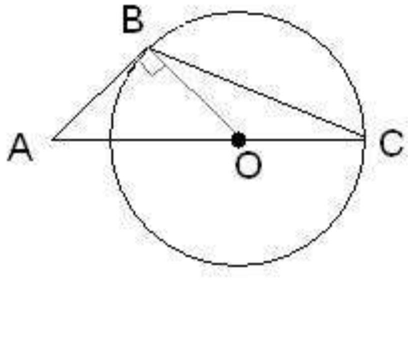
$$S_{DCO} = S_{DCB} - S_{BOC}$$
$$S_{DCO} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1 - S_{BOC}$$
Так как $AH = DH_1$, то последнее выражение можно переписать в виде:
$$S_{DCO} = \frac{1}{2} BC \cdot AH - S_{BOC}. \quad (2)$$
Выражения (1) и (2) идентичны между собой и описывают площади треугольников ABO и DCO, то есть площади этих треугольников равны. Утверждение доказано.

Задание 26. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если BC = 6, а расстояние от точки K до стороны AB равно 6.



Решение.
Так как ABCD параллелограмм, а AK и BK – биссектрисы углов A и B, то точка K равноудалена от сторон AB и BC (см. рисунок). По условию задачи точка K удалена от стороны AB на расстояние 6 единиц, следовательно, от стороны BC она также удалена на 6 единиц. Получаем, что высота параллелограмма (красная линия на рисунке) равна $h = 2 \cdot 6 = 12$ единиц. Тогда площадь параллелограмма можно найти как
$$S = h \cdot BC = 12 \cdot 6 = 72.$$
Ответ: 72.

Задание 24. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB = 2, AC = 8.
Решение.
Сделаем построение, проведен радиус BO, который будет перпендикулярен стороне AB, так как AB – касательная к окружности по условию задачи (см. рисунок).



Введем обозначение OB=OC=r – радиусы окружности. Тогда отрезок $AO = AC - OC = 8 - r$. Выразим квадрат радиуса BO=r из прямоугольного треугольника ABO по теореме Пифагора, получим следующее выражение:

$$BO^2 = AO^2 - AB^2$$

$$BO^2 = (8-r)^2 - 4 = 64 - 16r + r^2 - 4$$

$$BO^2 = r^2 - 16r + 60$$

Так как BO=r, получаем уравнение:

$$r^2 = r^2 - 16r + 60$$

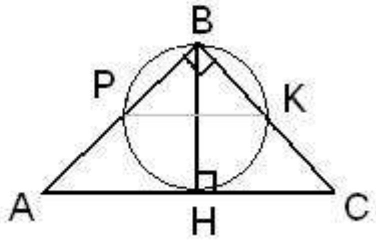
$$16r = 60$$

$$r = 3{,}75$$

И диаметр окружности равен $d = 2r = 2 \cdot 3{,}75 = 7{,}5$.

Ответ: 7,5.

Задание 24. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH, если PK = 11.

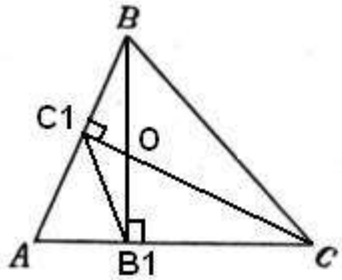


Решение.

Для решения данной задачи нужно вспомнить, что в любой окружности хорды, проведенные от ее диаметра, всегда пересекаются под углом в 90 градусов. Следовательно, точки P и K находятся на разных концах диаметра окружности, и так как PK=11, то и диаметр окружности равен 11. В задаче сказано, что BH – это диаметр окружности, значит, BH=PK=11.

Ответ: 11.

Задание 25. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB1 и CC1 Докажите, что углы BB1C1 и BCC1 равны.



1. Из рисунка видно, что треугольники BOC1 и CB1O подобны по двум углам (углы $\angle BC_1O = \angle CB_1O = 90^\circ$, так как CC1 и BB1 – высоты, а углы $\angle BOC_1 = \angle B_1OC$ как вертикальные углы). В подобных треугольниках соответственные стороны пропорциональны, то есть можно написать соотношение

$$\frac{BO}{CO} = \frac{C_1O}{B_1O}.$$

2. Треугольники C1OB1 и BOC подобны по двум пропорциональным сторонам и углам между ними (углы $\angle C_1OB_1 = \angle COB$ – вертикальные).

3. Из подобия треугольников следует равенство углов:

$$\angle OB_1C_1 = \angle BCO,$$

а, значит, равны и углы

$$\angle BB_1C_1 = \angle BCC_1$$